CA-006

一次関数の合成順と行列の積順
Composition Orderings for Linear Functions and Matrix Multiplication Orderings

久保 奨* 牧野 和久† 坂本 壮太‡
Susumu Kubo Kazuhisa Makino Souta Sakamoto

1 はじめに

本研究では，一次関数の合成順と行列の積順を扱う．一次関数の合成順とは，n 個の一次関数 $f_i(x) = a_i x + b_i$ ($i \in [n]$) と実定数 c が与えられたとき，$f_{\sigma(n)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)}(c)$ を最小化（あるいは，最大化）する合成順（すなわち，n 次の置換）σ を求める問題である．ただし，$[n] = \{1, \ldots, n\}$，a_i と b_i ($i \in [n]$) は実定数とする．例えば，$c = 0$, $f_1(x) = -x/2 + 3/2$, $f_2(x) = x - 3$, $f_3(x) = 3x - 1$ が与えられたとき，恒等置換 σ では，$f_3 \circ f_2 \circ f_1(0) = f_3(f_2(f_1(0))) = f_3(f_2(\frac{3}{2})) = f_3(-\frac{3}{2}) = -\frac{11}{2}$ となり，$\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 3$ という置換 τ では，$f_3 \circ f_1 \circ f_2(0) = 8$ となる．$3! = 6$ 通りの置換が存在するが，この例では σ と τ はそれぞれ最小値，最大値を与える．この合成順問題は，自然で基礎的な計算機科学分野の問題であると同時に，スケジューリングなど多くの応用をもつ．この問題は，Kawase-Makino-Seimi [6] によって提案された問題であるが，スケジューリング分野で（陰的に）扱われていた．

処理時間が $p_1, \ldots, p_n$ である n 個の仕事を 1 つの機械で処理させメイクスパン（最後の仕事が終わるまでの時間）を最小化する 1 機械スケジューリング問題を考えよう．最も古典的な設定では処理時間 p_i は定数であるが，仕事の開始時刻に依存する時間依存スケジューリングは広く研究されている [2, 3, 4, 8, 9, 10]．時間依存スケジューリングは，開始時間が遅いほど処理時間が短くなるという学習効果や開始時間が遅いほど疲労などで処理時間が長くなるという劣化を扱うために導入された．その中でもっとも広く研究されている線形時間依存，すなわち，処理開始時刻 s に対して，仕事 i の処理時間が $p_i(s) = \tilde{a}_i s + \tilde{b}_i$ の場合では，学習効果モデルは $-1 < \tilde{a}_i < 0$ [*1]，劣化モデルは $\tilde{a}_i > 0$ となる．この線形時間依存スケジューリング問題は，一次関数 $f_i(x) = (\tilde{a}_i + 1)x + \tilde{b}_i$ の最小合成順問題と等価である．Mosheiov [8] は，処理時間 $p_i(s)$ の定数項が全て 0 のとき，スケジュール（すなわち，置換）に依らず，メイクスパンが不変であることを示した．Gawiejnowicz-Pankowska [2], Gupta-Gupta [3], Tanaev ら [9], Wajs [10] は，処理時間が線形に増加する場合 ($\tilde{a}_i, \tilde{b}_i > 0$. つまり，$a_i > 1$, $b_i > 0$) を研究し，$\tilde{a}_i/\tilde{b}_i (= (a_i - 1)/b_i)$ の降順が最適順であることを示した．Ho-Leung-Wei [4] は，処理時間が線形に減少する場合（$-1 < \tilde{a}_i < 0$, $\tilde{b}_i > 0$. つまり，$0 < a_i < 1$, $b_i > 0$）も，$\tilde{a}_i/\tilde{b}_i (= (a_i - 1)/b_i)$ の降順で最適順が得られることを示した．その後，Kawase-Makino-Seimi [6] は，最適合成順問題を導入し，最大化問題も最小化問題として定式化できることを示すと同時に，非負一次関数（$a_i \geq 0$）に対する $O(n \log n)$ 時間アルゴリズムを構成した．しかしながら，一般の一次関数に対する合成順問題の計算量は未解決のまま残されており，多項式時間で計算可能かどうかは未だに分かっていない．

関連研究 [6] として，非線形関数の合成順問題の研究も行われている．例えば，区分線形関数の合成順問題は，リリース時刻（すなわち，処理可能時刻）や納期がある時間依存スケジューリングや自由順序秘書問題を含み，一般には NP 困難であるが，いくつかの重要な部分クラスに対して多項式時間で解けることが知られている．それ以外にも n 個中のいくつかの関数を合成させて最小化あるいは最大化させる部分合成順問題や n 個の中から k 個の関数を合成する k 合成順問題の研究も行われている．

本研究の成果

本論文では，この一次関数の合成順問題に対して，以下の 4 つの成果を得る．

(i) 傾き正（あるいは，非負）の一次関数に対する最適合成順の特徴付けを得る（定理 1）．
(ii) 傾き正（あるいは，非負）の一次関数に対する最適合成順の数え上げ（個数の計算）や列挙が効率的に可能であることを示す（系 2）．
(iii) 傾き正（あるいは，非負）の一次関数に対する最適合成順における大域的な最適性と局所的な最適性が同値であることを示す（定理 3）．
(iv) 一般の一次関数に対する最適合成順問題が傾き負の一次関数の個数に関して固定パラメータ容易（fixed-

* 公立鳥取環境大学 Tottori University of Environmental Studies
† 京都大学 Kyoto University
‡ Acompany
*1 早く処理が始まった仕事は早く完了するので，任意の正実数 t に対して，$p_i(s) < t + p_i(s + t)$ が成立するので，$\tilde{a}_i > -1$ となる．

parameter tractable, FPT）であることを示す（定理 4）．

ここで最適とは最小あるいは最大を意味する．これまで最適合成順 1 つを効率的に求めることは可能であったが，最適合成順の構造が未解決であった．それゆえ，例えば，一般（傾き負の一次関数を含む）の最適合成順問題に対する効率的なアルゴリズム構築が困難な状況にあった．(i) は，その最適合成順の構造を明らかにする成果である．この特徴付けを直接的に用いることで，(ii) を得ることができる．また，(i) を利用すると同時に，傾き負の一次関数の役割を考慮し，一般的な最適合成順の離散構造を解析することで，FPT アルゴリズムを構築することに成功した．(iii) は最適化の観点で重要な成果である．局所的な最適性が大域的な最適性を意味するという興味深い構造をもつことを示す．

次に，本論文では一次関数の合成順問題の拡張となる行列の積順問題を考察する．この行列積順問題は，マックスプラス代数版においては研究が行われているが，通常の代数系においては自然な問題にも関わらず，これまでに研究が行われていない現状にある．この行列積順問題に対して以下の成果を得る．

(v) 2 次正方行列の積順問題に対して，一次関数の合成順問題の成果が拡張可能であることを示す（定理 5）．また，その自然な一般化がいずれも強 NP 困難であることも示す（定理 6，7）．

(vi) マックスプラス代数における行列の積順問題が，(v) の系として得られることを示す（定理 8）．

(v) において，同時三角化可能な場合は，一次関数の合成順の構造が継承されることを示すことにより，一次関数の合成順の成果も拡張可能であることを示す．また，それ以外の拡張，例えば，3 次正方行列の積順は，たとえ，全ての行列が上三角行列としても，NP 困難であることを示す．

(vi) に関しては，マックスプラス代数の演算が（通常の）行列演算の極限として得られることを利用して，これまで知られていたマックスプラス版の最適行列積順の成果を得る．このことはメイクスパン最小の 2 機械フローショップスケジューリング問題における有名なジョンソン規則 [5] が我々の系として得られることも示すことになる．

本節の残りで，これらの成果を数学的に正確に記述する．まず，一次関数の合成を考えるとき，どんな合成順 σ を用いても，得られる合成関数の傾きが一定であることが分かる．それゆえ，合成順問題における入力 c はある意味不必要であり，一次関数合成順問題は，合成関数の切片を最大化，あるいは，最小化する問題とみなすことができる．

次に, 傾き正の一次関数に対する最適置換の特徴付けのために, 3 つの重要な概念, 反時計回り性, 同一直線上性, 潜在的恒等性を定義する．一次関数 $f(x) = ax + b$ を 2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$ とみなし, その角度をベクトルの極角（0 以上 2π 未満）と定義し, $\theta(f)$ と書く．f が恒等関数ならば, $\theta(f) = \perp$ とする．例えば, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ ならば, $\theta(f) = \pi/2$, $\theta(g) = 7\pi/6$ (図 1). 一次関数 $f_1, \ldots, f_n$ に対して, 置換 σ は, $\theta(f_{\sigma(k)}) \leq \cdots \leq \theta(f_{\sigma(n)}) \leq \theta(f_{\sigma(1)}) \leq \cdots \leq \theta(f_{\sigma(k-1)})$ となるようなある整数 $k \in [n]$ が存在するとき, **反時計回り**という．ここで, 恒等関数である f_i は無視する. 例えば, $f_{\sigma(2)}$ が恒等関数なら, $\theta(f_{\sigma(2)}) = \perp$ なので, $\theta(f_{\sigma(1)}) \leq \theta(f_{\sigma(3)})$ といった不等式を考える．一次関数 $f_1, \ldots, f_n$ は, その対応するベクトルが原点を通るある直線上にある, すなわち, 各 $i \in [n]$ に対して $\theta(f_i) \in \{\lambda, \lambda + \pi, \perp\}$ となる角度 λ が存在するとき, **同一直線上にある**という．また, $f_1, \ldots, f_n$ は, ある反時計回りの置換 σ により合成した関数が恒等関数, すなわち, $f_{\sigma(n)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)}(x) = x$ となるとき, **潜在的恒等である**という．置換は, それにより合成した関数が最小（最大）であるとき, **最小（最大）**という．以下のように，最小置換の完全な特徴付けを得る．

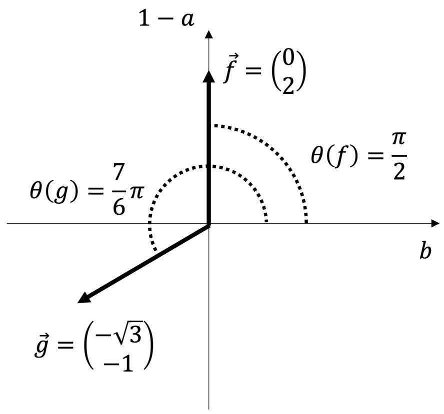

図1 $f(x) = -x$ と $g(x) = 2x - \sqrt{3}$ のベクトル表現.

定理 1. $f_1, \ldots, f_n$ を傾き正の一次関数とする．このとき, 以下の 3 つのいずれが成立する．

(i) 一次関数が同一直線上にあるならば, かつ, そのときに限り, 任意の置換が最小である．

(ii) 一次関数が同一直線上にないならば, 次の 2 つが等価である．

(ii-1) 一次関数が潜在的恒等である．

(ii-2) 置換 σ が反時計回りであることは, σ が最小であるための必要十分条件である．

(iii) 一次関数が同一直線上になく潜在的恒等でもないとき, 置換 σ が最小ならば, かつ, そのときに限り，σ は

$$\theta(f_{\sigma(n)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)}) + \pi \in [\theta(f_{\sigma(t)}), \theta(f_{\sigma(s)})]_{2\pi}$$

を満たす反時計回りの置換である．

(iii) の式中の s と t はそれぞれ $f_{\sigma(i)}$ が恒等関数でない最初と最後の整数 i である．また，2 つの実数 θ_1 と θ_2 が同じ角度，すなわち，$\theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ ならば，$\theta_1 =_{2\pi} \theta_2$ と書き，$[\theta_1, \theta_2]_{2\pi} = \{\theta \in [\lambda_1, \lambda_2] \mid \lambda_1 =_{2\pi} \theta_1,\ \lambda_2 =_{2\pi} \theta_2,\ \lambda_2 - \lambda_1 \in [0, 2\pi)\}$ と定義する．

なお, Kawase ら [6] が導入した辞書式順は反時計回りの置換と解釈でき, それ故，彼らのアルゴリズム的な成果は，反時計回りの置換の中に，最小置換が存在することを示したと言い換えられる．また，本論文では省略するが, 定理 1を拡張することで傾き非負の一次関数の最小置換の特徴付けが得られる．また，[6] に示された関数変換 (2節の式 (2), 3節の注 1参照) を用いることで，定理 1中の「反時計回り」を「時計回り」に置き換えることで, 最大置換を特徴付けることができる．

定理 1の特徴付けを直接的に利用することで，以下の系を得る．

系 2. 傾き正の一次関数に対する最小置換を多項式時間で数え上げることできる．また，最小置換を多項式時間遅延で列挙可能である．

ここで，列挙アルゴリズムが多項式時間遅延であるとは, アルゴリズムが動作し始めてから最初の要素を出力するまでの時間間隔，p 番目と $p+1$ 番目の要素を出力する時間間隔（$p = 1, 2, \ldots$），最後の要素を出力してからアルゴリズムが停止する時間間隔のそれぞれが（入力長の）多項式時間で抑えられることを意味する．

続いて, 最適化分野の重要な概念である局所的な最適性を定義するために，置換の近傍を導入する．置換 σ に対して, 3 つの自然数 ℓ, m, r ($\ell \le m < r$) を用いて, 置換 $\sigma_{\ell,m,r}$ を次で定義する（図 2参照）:

$$\sigma_{\ell,m,r}(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{if } 1 \le i < \ell,\ r < i \le n, \\ \sigma(i - \ell + m + 1) & \text{if } \ell \le i < \ell - m + r, \\ \sigma(i + m - r) & \text{if } \ell - m + r \le i \le r. \end{cases}$$

置換 σ の **近傍** $N(\sigma)$ を $\{\sigma_{\ell,m,r} \mid \ell \le m < r\}$, すなわち, σ において 2 つの隣り合う区間を交換することで得られる置換からなる集合と定義する. 置換 σ は, 任意の置換 $\mu \in N(\sigma)$ に対して $f^\sigma \le f^\mu$ であるとき, **局所最小**という. ここで，f^σ は σ による合成関数 $f_{\sigma(n)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(1)}$ を意味する.

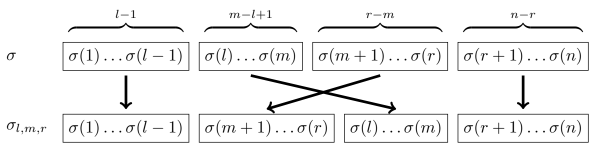

図2　$\sigma_{l,m,r}$ のイメージ

定理 3. 傾き正の一次関数に対して，置換が（大域）最小であることと局所最小であることは同値である．

定理 1と同様に，系 2，定理 3 は, 最小を最大と置き換えること，また，傾き非負の一次関数について一般化することが可能であるを付記する．

次に, 一般の一次関数の合成順を扱う．最適置換の構造的な性質を与え, さらに, 傾き正の一次関数に対する特徴付けと併せることで, 傾き負の一次関数の個数に関する FPT アルゴリズムを構成することができる．

定理 4. n 個の一次関数に対する最小置換は, $O(k2^kn^6)$ 時間で計算可能である．ここで, $k\,(>0)$ は傾き負の一次関数の個数とする．

系 2と同様に，最適置換を FPT という意味で効率的に数え上げや列挙が可能であることを付記する．

それから, 一次関数の合成順問題の一般化として, 行列の積順問題を考える．具体的には, n 個の m 次正方行列 $M_1, \ldots, M_n$ と 2 つの m 次元（列）ベクトル $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}$ が与えられたとき, $\boldsymbol{w}^\top M_{\sigma(n)} \cdots M_{\sigma(1)} \boldsymbol{y}$ を最小化（あるいは, 最大化）する置換 σ を見つける問題である．実際, 各 $i \in [n]$ に対して $M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とした行列の積順問題は, $c = 0$, 一次関数 $f_i(x) = a_i x + b_i$ に対する合成順問題に同値である．従って，行列の積順問題は, 一次関数の合成順問題の拡張とみなすことができる．

なお, $(M_1, \ldots, M_n, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ に対する最大化問題は $(M_1, \ldots, M_n, -\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y})$ に対する最小化問題に対応するので, 本論文では最小化問題のみを考える．

次の定理は, 一次関数合成順問題の結果の拡張である．行列 $M_1, \ldots, M_n$ は, 各 $i \in [n]$ に対して $P^{-1} M_i P$ が上三角行列となるような正則行列 P が存在するとき, **同時三角化可能**という．

定理 5. 同時三角化可能な 2 次正方行列に対する行列積順問題について，以下が成立する．

(i) 全ての行列の行列式が非負であれば，最小置換が $O(n \log n)$ 時間で計算可能である．

(ii) ある行列の行列式が負であるならば，最小置換が $O(k2^kn^6)$ 時間で計算可能である．ここで，k は行列

式が負となる行列の個数である．

ただ，残念なことに，自然な一般化の全てが P=NP でない限り，手に負えないことを示す．

定理 6. (i)　与えられる 2 次正方行列が全て非負の要素のみをもち，かつ，非負の行列式をもつ場合であっても，行列の積順問題は強 NP 困難である．
(ii)　与えられる正方行列が 3 次以上である場合，全てが上三角であり，かつ，非負の要素をもったとしても，行列の積順問題は強 NP 困難である．

行列積順問題の目標版，すなわち，与えられた $t \in \mathbb{R}$ に対して $|\boldsymbol{w}^\top M_{\sigma(n)} \cdots M_{\sigma(1)} \boldsymbol{y} - t|$ を最小化する問題も強 NP 困難である．

定理 7. 目標 $t \in \mathbb{R}$ が与えられているとき，任意の正実数 c_1, c_2 に対して $|\boldsymbol{w}^\top M_{\sigma(n)} \cdots M_{\sigma(1)} \boldsymbol{y} - t| \leq c_1 \cdot \min_\rho |\boldsymbol{w}^\top M_{\rho(n)} \cdots M_{\rho(1)} \boldsymbol{y} - t| + c_2$ となるような置換 σ が存在するかどうか判定する問題は，強 NP 完全である．

この定理は，近似の意味でも計算上困難であるを示す．また，傾き正の一次関数の合成順問題に対応する場合であっても定理 7中の問題は近似困難であることを示すことができる．

最後に，マックスプラス代数における行列の積順問題との関係性を考察する．マックスプラス代数とは，実数に $-\infty$ を付加した集合 $\mathbb{R}_{\max}$ に，次の 2 つの二項演算を定義したものである．$a, b \in \mathbb{R}_{\max}$ に対して，$a \oplus b = \max\{a, b\}$，$a \otimes b = a + b$ とする．“加法”$\oplus$ の単位元 $-\infty$ を $\mathbb{0}$，“乗法”$\oplus$ の単位元 0 を $\mathbb{1}$ と書くことにする（慣れた普通の代数との対応関係が分かりやすくなる）．この演算は，行列演算に自然に拡張できる．

Bouquard-Lenté-Billaut [1] は，マックスプラス代数での上三角行列 $N_i \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times m}$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \dots & \mathbb{0} \end{pmatrix} \otimes N_{\sigma(n)} \otimes \cdots \otimes N_{\sigma(1)} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ \vdots \\ \mathbb{0} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

を最小化する問題を扱い，$m = 2$ の場合に 2 機械フローショップスケジューリングにおける有名なジョンソン規則 [5] の拡張版を使って $O(n \log n)$ 時間で解けることを示した．Kubo-Nishinari [7] はフローショップスケジューリングと普通の行列の積との関係性に言及している．この関係性に着目し，Bouquard らの結果と同等な次の結果を，定理 5 (i) の系として導くことができる．

$N = \begin{pmatrix} a & b \\ \mathbb{0} & d \end{pmatrix}$（$a, b, d \neq \mathbb{0}$）に対して，

$$\kappa(N) = \begin{cases} (-1, b-a) & (a > d) \\ (0, 0) & (a = d) \\ (1, d-b) & (a < d) \end{cases}$$

と定義する．

定理 8. $m = 2$ の場合，(1) の最小置換は κ に対する辞書式順列により得られる．

2　準備と一次関数の基本的な性質

本節では，いくつかの表記法を導入し，一次関数の基本的な性質を示す．そして，最小・最大合成順問題が多項式等価であることに言及する．

2 つの実数 ℓ と r $(\ell < r)$ に対して，$[\ell, r] = \{x \in \mathbb{R} \mid l \leq x \leq r\}$（閉区間）とする．同様に，$(\ell, r]$ と $[\ell, r)$ は半開区間，(ℓ, r) は開区間とする．一次関数 f の傾きと切片をそれぞれ $\alpha(f)$ と $\beta(f)$ とする．角度の足し算などで，$[0, 2\pi)$ の範囲から出ることがあるので，1節で導入した添字に 2π を付けた表記を使う．例えば，$[3\pi/2, 7\pi/3]_{2\pi} = \cdots \cup [-\pi/2, \pi/3] \cup [3\pi/2, 7\pi/3] \cup [7\pi/2, 13\pi/3] \cup \cdots$ と閉区間の集まりとする．同様に開区間の集まり $(\theta_1, \theta_2)_{2\pi}$，半開区間の集まり $[\theta_1, \theta_2)_{2\pi}$, $(\theta_1, \theta_2]_{2\pi}$ を定義する．また，区間でない集合 S に対して，$S_{2\pi} = \{\theta \mid \theta =_{2\pi} \lambda \text{ for } \lambda \in S\}$ とする．

一次関数の 4 つの基本的な性質を示す（いずれも計算するだけで示せる）．補題 9, 10, 11は，傾き正を仮定していない点に注意する．

補題 9. g を恒等関数とする．このとき，任意の関数 h に対して，$h \circ g = g \circ h = h$ である．

補題 10. 一次関数 g, h について，次の等価関係が成り立つ．ただし，関数間の不等式はあらゆる変数に対して不等式が成り立つことを意味する．

(i)　$h \circ g < g \circ h \;\Leftrightarrow\; \theta(h) - \theta(g) \in (0, \pi)_{2\pi}$.
(ii)　$h \circ g = g \circ h \;\Leftrightarrow\; \theta(h) - \theta(g) \in \{0, \pi\}_{2\pi}$.

補題 11. 一次関数 g, h について，$\overrightarrow{h \circ g} = \vec{h} + \alpha(h) \vec{g}$ である．

補題 12. 恒等関数でない傾き正の一次関数 g, h について，次が成り立つ．

(i)　$\theta(h) - \theta(g) \in (0, \pi)_{2\pi} \Leftrightarrow \theta(h \circ g) \in (\theta(g), \theta(h))_{2\pi}$
$\Leftrightarrow \theta(g \circ h) \in (\theta(g), \theta(h))_{2\pi}$.
(ii)　$\theta(h) - \theta(g) \in \{0, \pi\}_{2\pi}$
$\Leftrightarrow \theta(h \circ g) \in \{\theta(g), \theta(h), \perp\}$

$\Leftrightarrow \theta(g \circ h) \in \{\theta(g), \theta(h), \perp\}$.

(iii) $\theta(h) = \theta(g) \Rightarrow \theta(h \circ g) = \theta(g \circ h) = \theta(h) (= \theta(g))$.

(iv) $\theta(h \circ g) = \perp \Leftrightarrow \theta(g \circ h) = \perp \Rightarrow \theta(h) - \theta(g) =_{2\pi} \pi$.

本節の最後に, 最小化問題と最大化問題の間の線形時間変換を紹介する [6]．一次関数 $f(x) = ax + b$ に対して, 別の一次関数 $\tilde{f}$ を次によって定義する：

$$\tilde{f}(x) \;=\; ax - b. \tag{2}$$

傾きに変化はないことに注意する．一次関数 $f_1, \ldots, f_n$ と置換 σ に対して, $\beta(f^\sigma) = -\beta(\tilde{f}^\sigma)$ が成り立つ．任意の置換 σ に対して, $\alpha(f^\sigma) = \alpha(\tilde{f}^\sigma) = \prod_{i \in [n]} \alpha(f_i)$ であるため, 定数 c について気にする必要はなく, $f_1, \ldots, f_n$ に対する最大化問題は $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ に対する最小化問題に等しい．そのため, 一次関数に対する最小化問題を主に扱う．

3 傾き正の一次関数の合成

本節では, 傾き正の一次関数の合成順を考える．特に, 定理 1の証明の概要を示す．まず, 定理 1 (i) を示す．これは 2節の基本的な性質から容易に得られる．

定理 1 (i) の証明. まず, 一次関数が同一直線上にあるとする．各 $i \in [n-1]$ に対して, ρ_i を整数 i と $i+1$ を交換する互換（隣接互換）とする．また, 恒等置換を id とする．このとき, 補題 9, 10 (ii) により, $f_i \circ f_{i+1} = f_{i+1} \circ f_i$ だから, $f^{\rho_i} = f^{\mathrm{id}}$ である．よく知られているように, 任意の置換は隣接互換の積として書ける．それゆえ, 任意の置換 σ に対して, $f^\sigma = f^{\mathrm{id}}$ が成り立ち, これが最小値でもある．

次に, 任意の置換が最小とする．このとき, もし同一直線上にない一次関数があり, それらを f_1, f_2 とすると, 補題 10 (i) により, $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$ となる．これは $f_1 \circ f_2 \circ (f_n \circ \cdots \circ f_3) \neq f_2 \circ f_1 \circ (f_n \circ \cdots \circ f_3)$ を意味し, 矛盾． □

実は, 定理 1 (i) は傾き正という条件を要しない．そのため, 一般の一次関数に対しても成り立つ．

次の補題は本研究で重要な役割を果たす．

補題 13. 同一直線上にない, 傾き正の一次関数に対する局所最小の置換は反時計回りである．

これを認めれば, 次の補題と併せて, 定理 1 (ii) の証明が得られる．

補題 14. σ を傾き正の一次関数 $f_1, \ldots, f_n$ に対する反時計周りの置換とする．その合成関数が恒等関数である, つまり, $f^\sigma(x) = x$ であれば, 任意の反時計回りの置換による合成で恒等関数が得られる．

証明. 置換 τ が恒等関数を与える, つまり, $f^\tau(x) = x$ とする．補題 12 (iv) により, 任意の $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対して, $(f_{\tau(n)} \circ \cdots \circ f_{\tau(k+1)}) \circ (f_{\tau(k)} \circ \cdots \circ f_{\tau(1)}) = (f_{\tau(k)} \circ \cdots \circ f_{\tau(1)}) \circ (f_{\tau(n)} \circ \cdots \circ f_{\tau(k+1)})$ となる．右辺の置換は $\tau_{1,k,n}$ であり, これを τ_k と略記し, k シフトと呼ぶことにすれば, この等式は, k シフトを適用しても合成関数は変わらない, つまり, $f^{\tau_k} = f^\tau$ を意味する．

さらに, 任意の置換 ν に対して, $k \in [n-1]$ で $\theta(f_{\nu(k)}) = \theta(f_{\nu(k+1)})$ であるならば, 補題 10 (ii) により, $f^\nu = f^{\nu_{k,k,k+1}}$ である．

任意の反時計回りの置換は, σ に対して, 同じ角度に対する隣接互換と k シフトを適用することで得られるので, 上の 2 つから示される． □

定理 1 (ii) の証明. (ii-1) $\Longrightarrow$ (ii-2) は補題 13, 14から示される．

逆を考える．補題 13により, 全ての反時計回りの置換が恒等関数でない g を与えるとしよう. 与えられた一次関数は同一直線上にはないので,

$$\theta(f_i) \;\notin \{\theta(g), \theta(g) + \pi\}_{2\pi} \tag{3}$$

となるような恒等関数でない f_i が存在する．$\sigma(1) = i$ となる反時計回りの置換 σ を取り, $h = f_{\sigma(n)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(2)}$ とする．このとき, $g = h \circ f_i$ である．(3) と補題 11により, $\theta(h) \notin \{\theta(f_i), \theta(f_i) + \pi\}_{2\pi} \cup \{\perp\}$ だから, 補題 10 (i) は $h \circ f_i \neq f_i \circ h$ を含意するが, これは仮定と矛盾する． □

次の例 1 は, 定理 1 (iii) の例である．この証明は反時計回りの置換 σ による f^σ の単峰性に依存することのみを紹介しておく．

例 1. 5 つの傾き正の一次関数 $f_1 = x/2 + 1$, $f_2 = x/3 - 1$, $f_3 = 2x - 2$, $f_4 = 2x - 1$, $f_5 = 3x$ を考える．このとき, これらのベクトルは図 3のようになる．恒等置換 id が反時計回りで, 他の反時計回りについて $f^{\mathrm{id}} = 2x - 23$, $f^{\mathrm{id}_1} = 2x - 25/2$, $f^{\mathrm{id}_2} = 2x - 19/6$, $f^{\mathrm{id}_3} = 2x - 13/3$, $f^{\mathrm{id}_4} = 2x - 23/3$ だから, 補題 13により, 恒等置換が最小であることが分かる．また, $(f^{\mathrm{id}}, f^{\mathrm{id}_1}, f^{\mathrm{id}_2}, f^{\mathrm{id}_3}, f^{\mathrm{id}_4})$ が単峰性を示している．さらに, 恒等置換が $\theta(f^{\mathrm{id}}) + \pi \in [\theta(f_5), \theta(f_1)]_{2\pi}$ を満たしていることが分かる．

注 1. 2節で議論したように, $f_1, \ldots, f_n$ に対する最大化は, (2)により得られる $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ に対する最小化に等しい．こうして, 傾き正の一次関数に対する全ての結果は, 最大化問題にも適用可能である．具体的には, 変換 (2) はベクトル表現において $(1-a)$ 軸に関する鏡映なので, 「反時計回り」を「時計回り」に置き換えることで, 最大化問題に対する結果を得ることができる．

系 2, 定理 3は定理 1を用いて示すことができる．

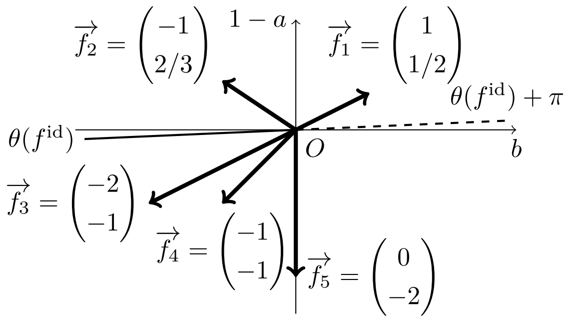

図3　$f_1, \ldots, f_5$ に対するベクトル表現.

4　一般の一次関数の合成

本節では, 一般の一次関数の合成順を扱う．例を例 2に示す．k を傾き負の一次関数の個数とする．3 節で, 傾き正の一次関数の場合の特徴付けを示した．ここでは, 一般の一次関数の構造的特徴を提示した上で, 定理 4の証明の概要を示す．この計算量はこれまで分かっていなかった [6].

本節のこれ以降, 一次関数は恒等関数でも定数関数でもないとする．もちろん, 恒等関数は最適合成に影響しない．また, 定数関数 $f(x) = b$ は, ある $\epsilon > 0$ に対して $f^{(\epsilon)}(x) = \epsilon x + b$ を考える (傾きが非ゼロの場合は $f^{(\epsilon)} = f$ とする) ことで, 傾き正の場合に帰着することが示せる．我々のアルゴリズムは, 角度の大小だけが必要になるので, ϵ を明示的には使わないことを付記しておく．

例 2. 7 つの一次関数 $f_1 = x/3$, $f_2 = 2x/3+1$, $f_3 = x+1/2$, $f_4 = -x-3$, $f_5 = x-1$, $f_6 = 3x/2$, $f_7 = 2x+1$, が与えられている．f_4 以外は傾き正である．これらのベクトル表現を図 4に示す．恒等置換が最小であることに注意する．傾き正の一次関数に対しては, 補題 10により, 任意の最小置換 σ に対して, $\theta(f_{\sigma(i+1)}) - \theta(f_{\sigma(i)}) \in [0, \pi]_{2\pi}$ であったが, この重要な性質が一般の場合には成り立たないことが分かる．実際, $\theta(f_2) - \theta(f_1) \in (\pi, 2\pi)_{2\pi}$ である．そのかわり, 次の性質が成り立つ：傾き負の f_4 の前では, f_1, f_2, f_3 に対する最大置換によって, $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ が定まり, 一方, その後ろは, f_5, f_6, f_7 に対する最小置換によって, $f_7 \circ f_6 \circ f_5$ が定まる．

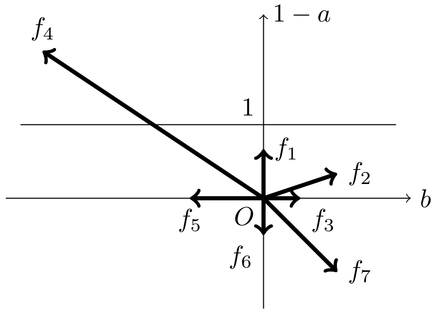

図4　$f_1, \ldots, f_7$ のベクトル表現.

傾き非負の一次関数を 2 つに分ける集合 L^σ と U^σ を定義する．置換 σ に対して, $\alpha(f_{\sigma(i)}) < 0$ となる整数 i を昇順に $n_1^\sigma, \ldots, n_k^\sigma$ とする．これらに挟まれたインデックスの集合を準備する．具体的には, $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ に対して,

$$I_j^\sigma = \{i \in [n] \mid n_j^\sigma < i < n_{j+1}^\sigma\}$$

とする．ここで, $n_0^\sigma = 0, n_{k+1}^\sigma = n+1$ とする．これを使って, L^σ と U^σ を次のとおり定義する．

$$L^\sigma = \bigcup_{k-j:\mathrm{even}} I_j^\sigma, \quad U^\sigma = \bigcup_{k-j:\mathrm{odd}} I_j^\sigma.$$

例 2では, $L^{\mathrm{id}} = I_1^{\mathrm{id}} = \{5, 6, 7\}$, $U^{\mathrm{id}} = I_0^{\mathrm{id}} = \{1, 2, 3\}$ となる．

次の補題のとおり, 置換 σ が最小ならば, L^σ と U^σ に対する置換はそれぞれ反時計回りと時計回りになることが示せる. $L^\sigma = \{\ell_1, \ldots, \ell_{|L^\sigma|}\}, U^\sigma = \{u_1, \ldots, u_{|U^\sigma|}\}$ とし, 各要素は昇順に並んでおり, $i \in [|L^\sigma|]$ に対して $p_i = f_{\sigma(\ell_i)}$, また, $i \in [|U^\sigma|]$ に対して $q_i = f_{\sigma(u_i)}$ とする．

補題 15. σ を恒等関数でも定数関数でもない一次関数 $f_1, \ldots, f_n$ に対する最小置換であるとする．また, p_i, q_i は上記のとおりとする．このとき, 次が成り立つ．

(i)　恒等置換 $\mathrm{id} : [|L^\sigma|] \to [|L^\sigma|]$ は, $p_1, \ldots, p_{|L^\sigma|}$ が同一直線上にない限り, それらに対して反時計回りである．

(ii)　恒等置換 $\mathrm{id} : [|U^\sigma|] \to [|U^\sigma|]$ は, $q_1, \ldots, q_{|U^\sigma|}$ が同一直線上にない限り, それらに対して時計回りである．

証明の概要. k が偶数のとき,

$$\begin{aligned} f^\sigma = {} & \overbrace{p_{|L^\sigma|} \circ \cdots \circ p_{|L^\sigma|-|I_k^\sigma|+1}}^{I_k^\sigma} \circ g_{k/2} \circ \cdots \\ & \circ g_2 \circ \overbrace{p_{|I_0^\sigma|+|I_2^\sigma|} \circ \cdots \circ p_{|I_0^\sigma|+1}}^{I_2^\sigma} \circ g_1 \circ \overbrace{p_{|I_0^\sigma|} \circ \cdots \circ p_1}^{I_0^\sigma}. \end{aligned}$$

ここで, $j \in \{1, \ldots, k/2\}$ に対して

$$g_j = f_{\sigma(n_{2j}^\sigma)} \circ f_{\sigma(n_{2j}^\sigma - 1)} \circ \cdots \circ f_{\sigma(n_{2j-1}^\sigma)}$$

である．g_j の両端のみ傾き負であることに注意．f^σ は傾き正の一次関数の合成と見なせるため, 定理 1 は (i) を含意する．

他の場合や (ii) も同様に示せる．　□

さらに, 次の補題 16 (iii) のように, L^σ と U^σ は, ベクトル表現において, 2 つの角度 ψ_1, ψ_2 によって, 2 つの領域にきれいに分かれる．インデックスの集合 $I \subseteq [n]$ に対して, $\theta(I) = \{\theta(f_{\sigma(i)}) \mid i \in I\}$ とする．

補題 16. 恒等関数でも定数関数でもない一次関数 $f_1, \dots, f_n$ に対して, 次を満たすような最小置換 σ が存在する.

(i) $f_{\sigma(\ell)}$ $(\ell \in L^\sigma)$ が反時計回りに並ぶ,
(ii) $f_{\sigma(u)}$ $(u \in U^\sigma)$ が時計回りに並ぶ,
(iii) ある 2 つの角度 $\psi_1 \in (0, \pi)$, $\psi_2 \in (\pi, 2\pi)$ に対して, $\theta(L^\sigma) \subseteq [\psi_1, \psi_2]$ かつ $\theta(U^\sigma) \subseteq (\psi_2, \psi_1)_{2\pi}$,
(iv) 任意の相異なる s, t に対して, $\theta(I_s^\sigma) \cap \theta(I_t^\sigma) = \emptyset$.

これにより, 最小置換は $O(k!\, n^{k+4})$ 時間で求められることを示すことができる．この XP の結果を改善する, すなわち, k に関する FPT アルゴリズムを得るために, 次の問題に対して動的計画法を適用する.

問題 順序付けされた LU の最適合成
入力: 傾き正の一次関数の集合 $L = \{p_1, \dots, p_{|L|}\}$, $U = \{q_1, \dots, q_{|U|}\}$. 傾き負の一次関数 $g_1, \dots, g_k$. ただし, $k > 0$.
出力: 次を満たすような, $L \cup U \cup \{g_1, \dots, g_k\}$ に属する一次関数に対する最小置換 σ：

(i) $L^\sigma = L$, $U^\sigma = U$,
(ii) 置換 σ の L 上, U 上への制限が, それぞれ $(p_1, \dots, p_{|L|})$, $(q_1, \dots, q_{|U|})$ という順序を作り出す,

元の問題に対する最小置換は, 順序付けされた LU の最適合成問題（$|L| + |U| \leq n - k$ とする）を $O(n^4)$ 回解くことで求められる．順序付けされた LU の最適合成問題は $O(2^k k(|L| + |U| + k)^2)$ 時間で解けることが示せるので, 定理 4が得られる.

5 行列の積順

本節では, 一次関数の合成順の一般化として, 行列の積順を考える．定理 5や 8の証明の概要を示すとともに，NP 困難性を示すために用いた問題を紹介する.

定理 5を示すために, 2 次正方行列が全て上三角の場合を考える．まず, この問題が $\boldsymbol{w}^\top = (1, 0)$, $\boldsymbol{y}^\top = (0, 1)$ とした $(2, 2)$ 成分が非負の上三角行列に対する最小積順問題に線形時間で帰着できることを示せる．次に, この問題を一次関数の合成順問題に変換する．一次関数と同様に, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ については, ある実数 $\epsilon \neq 0$ に対して, $M^{(\epsilon)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$ を考えることで, $(2, 2)$ 成分が非ゼロの場合に帰着できることが示せる．こうして, 与えられた上三角行列の $(2, 2)$ 成分 d_i は非ゼロとしてよい．このとき,

$$(1 \quad 0)\, M_{\sigma(n)} \cdots M_{\sigma(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n} d_i \right) f^\sigma(0)$$

となる．ここで, 各 $i \in [n]$ に対して, $f_i(x) = (a_i/d_i)x + b_i/d_i$. これは, 上三角行列の積順問題が一次関数の合成順問題を解くことで解けることを意味している．我々のアルゴリズムはベクトル f_i 自体ではなく, その極角 $\theta(f_i)$ を使う．それゆえ, $d_i = \epsilon$ の場合を気にする必要はない．そして, 2 次正方行列に対する次の補題を得る.

補題 17. 2 次上三角行列 $M_1, \dots, M_n$ に対して, 次が成り立つ.

(i) 全ての行列の行列式が非負であるならば, 最小置換は $O(n \log n)$ 時間で得られる.
(ii) ある行列の行列式が負であるならば, 最小置換は $O(k 2^k n^6)$ 時間で得られる．ここで, k は行列式が負である行列の個数である.

これからただちに定理 5を示せる.

残念なことに, この結果を 1) 一般の 2 次正方行列（非負で, 行列式が非負であっても）の場合, 2) 3 次以上の正方行列（非負上三角であっても）の場合, 3) ある値に近づける問題に拡張することはできない（定理 6 (i), (ii), 定理 7)．定理 6 (i), 定理 7 の証明には 3 分割問題（3-PARTITION）を使う.

最後に，マックスプラス代数との関係性をより詳しく紹介する．目的関数 (1) は，正の実数 γ を用いて，（普通の）非負上三角行列 M_i を $(M_i)_{jk} = \gamma^{(N_i)_{jk}}$ で定義すれば,

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \frac{1}{\log \gamma} \log \left[(\, 1\ 0\ \dots\ 0\,) M_{\sigma(n)} \cdots M_{\sigma(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

と書ける．鍵となるのは，恒等式

$$a \oplus b = \lim_{\gamma \to +\infty} \frac{1}{\log \gamma} \log(\gamma^a + \gamma^b)$$
$$a \otimes b = \frac{1}{\log \gamma} \log(\gamma^a \times \gamma^b)$$

である．この極限の関係式に基づき，定理 8を定理 5 (i) の系として導くことができる.

また，Bouquard ら [1] は，(1) を最小化する問題について，$m = 3$ の場合に強 NP 困難であることも示した．定理 6 (ii) の証明には，この強 NP 困難問題を使う.

参考文献

[1] J.-L. Bouquard, C. Lenté, and J.-C. Billaut, *Application of an optimization problem in max-plus algebra to scheduling problems*, Discrete Applied Mathematics, 154 (2006), pp. 2064–2079.

[2] S. Gawiejnowicz and L. Pankowska, *Scheduling jobs with varying processing times*, Information Processing Letters, 54 (1995), pp. 175–178.

[3] J. N. Gupta and S. K. Gupta, *Single facility scheduling with nonlinear processing times*, Computers & Industrial Engineering, 14 (1988), pp. 387–393.

[4] K. I.-J. Ho, J. Y.-T. Leung, and W.-D. Wei, *Complexity of scheduling tasks with time-dependent execution times*, Information Processing Letters, 48 (1993), pp. 315–320.

[5] S. M. Johnson, *Optimal two-and three-stage production schedules with setup times included*, Naval research logistics quarterly, 1 (1954), pp. 61–68.

[6] Y. Kawase, K. Makino, and K. Seimi, *Optimal composition ordering problems for piecewise linear functions*, Algorithmica, (2018).

[7] S. Kubo and K. Nishinari, *Applications of max-plus algebra to flow shop scheduling problems*, Discrete Applied Mathematics, 247 (2018), pp. 278–293.

[8] G. Mosheiov, *Scheduling jobs under simple linear deterioration*, Computers & Operations Research, 21 (1994), pp. 653–659.

[9] V. S. Tanaev, V. S. Gordon, and Y. M. Shafransky, *Scheduling Theory. Single-Stage Systems*, Springer, 1994.

[10] W. Wajs, *Polynomial algorithm for dynamic sequencing problem*, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 31 (1986), pp. 209–213.